Пригласительный тур XIV олимпиады по теории вероятностей и статистике для школьников

Ответы и решения

Вариант 1

1. 20. **2.** Пример, показывающий такое распределение голосов, показан в таблице. Возможны другие варианты.

	Очень нравится песня №	Совсем не нравится песня №
1 судья	1	2
2 судья	1	3
3 судья	2	1
4 судья	3	1

3. $\frac{1}{14}$. **4.** В 4 раза. **5.** $\frac{23}{72}$. **6.** 75.

7. Решение. а) Например, среднее набора (1, 2, 4) таким способом вычислить нельзя: $(1,2,4)\longrightarrow(1,3)\longrightarrow(2)$, а на самом деле среднее равно $2\frac{1}{3}$.

б) Пётр прав. Пусть в наборе 2^n чисел (n натуральное). После замены всех пар их средними получится набор, в котором вдвое меньше чисел. Сумма чисел тоже станет вдвое меньше, чем была. Значит, среднее арифметическое не изменится, а количество чисел снова окажется степенью числа 2. Поэтому среднее не будет меняться при каждом следующем «проходе», и в конце концов останется единственное число, которое равно среднему арифметическому исходного набора.

Если в наборе чисел не 2^n, то в какой-то момент в получившемся очередном наборе окажется нечётное количество чисел $2k+1$, которое больше единицы. Пусть среднее арифметическое этого набора равно $\bar{x}$. При следующем проходе одно число (обозначим его a) останется без пары. После замены пар их средними получится набор, в котором чисел $k+1$, а сумма всех чисел равна $\frac{\bar{x}\cdot(2k+1)-a}{2}+a=\frac{(2k+1)\bar{x}+a}{2}$. Значит, среднее станет равно $\frac{(2k+1)\bar{x}+a}{2(k+1)}=\bar{x}+\frac{a-\bar{x}}{2(k+1)}$. Чтобы среднее не изменилось, должно выполняться равенство $a=\bar{x}$. Если это не так, то среднее арифметическое изменится. Таким образом, способ Сергея не работает для произвольного набора, в котором количество чисел не является натуральной степенью числа 2.

Критерии оценивания

Полное решение в п. б)	3 балла
Верный контрпример в п. а), в п. б) показано, что способ верно работает, если количество чисел является степенью двойки, отсутствует доказательство того, что другие варианты не подходят	2 балла
Верный контрпример в п. а), решение п. б) отсутствует или неверно	1 балл
Контрпример отсутствует или неверный, рассуждения в пункте б) отсутствуют или не имеют отношения к делу	0 баллов

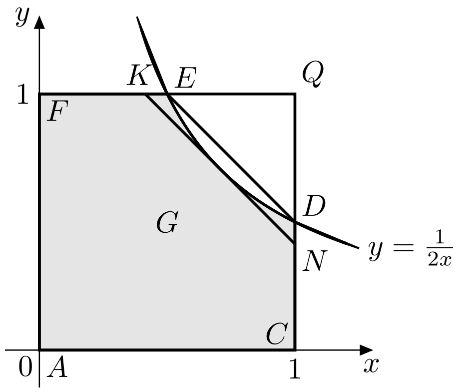
8. Решение. Наибольшее отклонение от среднего среди тех измерений, которые сохранились, составляет 39 г, что не превышает 10 % от номинальной массы порции. Отклонения тех измерений, которые прочитать нельзя, меньше 39 г: например, число 38? не меньше, чем 380, поэтому отклонение числа 38? от среднего не превосходит 19. Значит, все отклонения не больше 39 г.

Стандартное отклонение не превосходит наибольшего отклонения, поэтому стандартное отклонение не больше 39 г. Автомат не требует ремонта.
Ответ: не требует.

Критерии оценивания

Решение полное и верное. Возможны другие рассуждения. Например, участник дописал недостающие значения так, чтобы не уменьшить стандартное отклонение, нашёл стандартное отклонение полученного набора и указал, что у данного набора отклонение не больше	3 балла
Ответ верный, но имеется оценка не стандартного отклонения, а среднего квадратичного отклонения от номинальной массы 400 г. Дальнейшие рассуждения верны	1 балл
Решение неверное либо отсутствует	0 баллов

9. Решение. Введём систему координат с началом в точке A так, чтобы две вершины квадрата попали в точки с координатами $(1;0)$ и $(0;1)$ (рис. 1). Событие «площадь прямоугольника меньше чем 0,5» случится, только если точка B попадёт в фигуру G, ограниченную сторонами квадрата и гиперболой $y=\frac{1}{2x}$ (см. рис.). Проведём касательную NK к гиперболе в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и хорду DE. Фигура G содержит пятиугольник $ACNKF$, но сама заключена в пятиугольнике $ACDEF$, поэтому площадь фигуры G ограничена площадями этих пятиугольников: $S_{ACNKF}<\mathrm{P}(G)<S_{ACDEF}$. Найдём площади пятиугольников:



$$S_{ACNKF}=1-S_{QNK}=2\sqrt{2}-2>0{,}828 \text{ и } S_{ACDEF}=1-S_{QDE}=0{,}875.$$

Отсюда следуют нужные оценки.

Примечание. Возможны другие способы решения.

Критерии оценивания

Решение полное и верное	3 балла
Имеется только одна из двух нужных оценок	1 балл
Решение неверное либо отсутствует	0 баллов

Вариант 2

1. 18. **2.** Пример, показывающий такое распределение голосов, показан в таблице. Возможны другие варианты. **3.** $\frac{1}{24}$. **4.** В 8 раз. **5.** $\frac{49}{72}$. **6.** 68.

	Очень нравится песня №	Совсем не нравится песня №
1 судья	1	2
2 судья	1	4
3 судья	3	1
4 судья	4	1

7. Решение. а) Например, среднее набора (1, 2, 5) таким способом вычислить нельзя: $(1,2,5)\longrightarrow(2,\ 3)\longrightarrow(2,5)$, а на самом деле среднее равно $2\frac{2}{3}$.

б) Пётр прав. Пусть в наборе 2^n чисел (n натуральное). После замены всех пар их средними получится набор, в котором вдвое меньше чисел. Сумма чисел тоже станет вдвое меньше, чем была. Значит, среднее арифметическое не изменится, а количество чисел снова окажется степенью числа 2. Поэтому среднее не будет меняться при каждом следующем «проходе», и в конце концов останется единственное число, которое равно среднему арифметическому исходного набора.

Если в наборе чисел не 2^n, то в какой-то момент в получившемся очередном наборе окажется нечётное количество чисел $2k+1$, которое больше единицы. Пусть среднее арифметическое этого набора равно $\bar{x}$. При следующем проходе одно число (обозначим его a) останется без пары. После замены пар их средними, получится набор, в котором чисел $k+1$, а сумма всех чисел равна $\frac{\bar{x}\cdot(2k+1)-a}{2}+a=\frac{(2k+1)\bar{x}+a}{2}$. Значит, среднее равно $\frac{(2k+1)\bar{x}+a}{2(k+1)}=\bar{x}+\frac{a-\bar{x}}{2(k+1)}$. Чтобы среднее не изменилось, должно выполняться равенство $a=\bar{x}$. Если это не так, то среднее арифметическое изменится. Таким образом, способ Сергея не работает для произвольного набора, в котором количество чисел не является натуральной степенью числа 2.

Критерии оценивания

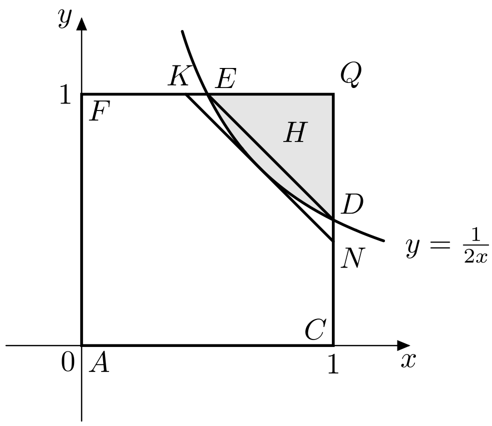
Полное решение в п. б)	3 балла
Верный контрпример в п. а), в п. б) показано, что способ верно работает, если количество чисел является степенью двойки, отсутствует доказательство того, что другие варианты не подходят	2 балла
Верный контрпример в п. а), решение п. б) отсутствует или неверно	1 балл
Контрпример отсутствует или неверный, рассуждения в пункте б) отсутствуют или не имеют отношения к делу	0 баллов

8. Решение. Наибольшее отклонение от среднего среди тех измерений, которые сохранились, составляет 37 г, что не превышает 10% от номинальной массы порции. Отклонения тех измерений, которые прочитать нельзя, меньше 37 г: например, число 41? меньше чем 420, поэтому отклонение числа 41? от среднего меньше чем 19. Значит, все отклонения не больше 37 г.

Стандартное отклонение не превосходит наибольшего отклонения, поэтому стандартное отклонение не больше 37 г. Автомат не требует ремонта.
Ответ: не требует.

Критерии оценивания

Решение полное и верное. Возможны другие рассуждения. Например, участник дописал недостающие значения так, чтобы не уменьшить стандартное отклонение, нашёл стандартное отклонение полученного набора и указал, что у данного набора отклонение не больше	3 балла
Ответ верный, но имеется оценка не стандартного отклонения, а среднего квадратичного отклонения от номинальной массы 400 г. Дальнейшие рассуждения верны	1 балл
Решение неверное либо отсутствует	0 баллов



9. Решение. Введём систему координат с началом в точке A так, чтобы две вершины квадрата попали в точки с координатами $(1;0)$ и $(0;1)$ (рис. 1). Событие «площадь прямоугольника больше чем 0,5» случится, только если точка B попадёт в фигуру H, ограниченную сторонами квадрата и гиперболой $y=\dfrac{1}{2x}$ (см. рис.). Проведём касательную NK к гиперболе в точке $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и хорду DE. Фигура H содержит треугольник DEQ, но сама заключена в треугольнике KNQ, поэтому площадь фигуры H ограничена площадями этих треугольников: $S_{DEQ}<\mathrm{P}(H)<S_{KNQ}$. Найдём площади треугольников:

$$S_{DEQ}=0{,}125 \text{ и } S_{KNQ}=3-2\sqrt{2}<0{,}172.$$

Отсюда следуют нужные оценки.

Примечание. Возможны другие способы решения.

Критерии оценивания

Решение полное и верное	3 балла
Имеется только одна из двух нужных оценок	1 балл
Решение неверное либо отсутствует	0 баллов